Title	モジュラー形式についての考察 : 小池正夫, 宗政昭弘, 関口次郎との共同研究 (代数的組合せ論)
Author(s)	坂内, 英一
Citation	数理解析研究所講究録 (1999), 1109: 1-11
Issue Date	1999-08
URL	http://hdl.handle.net/2433/63317
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
1109 巻 1999 年 1-11

モジュラー形式についての考察

小池正夫，宗政昭弘，関口次郎 との共同研究

坂内英一・九大数理
Eiichi Bannai
Graduate School of Mathematics
Kyushu University

以下の原稿は研究集会（1998 年 12 月 京大数理研）での私の講演をほぼそのまま記録したものです．最後のところで，講演では予想として述べたものでその後証明が完成した部分ついても付け加えてあります．なお，この仕事は，小池正夫（九大），宗政昭弘（九大），関口次郎（姫路工大）との共同研究であり 4 名による共著論文を準備中です．この原稿はその論文の私（坂内）の個人的な要約（覚え書き）であり記述に不正確・不十分な所があるかもしれませんが文責は全て私にあります．

§1. 整数ウェイトのモジュラー形式

Γ を $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の指数有限の部分群とする．$\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ でウェイト k $(k\in\mathbb{Z})$ の Γ に関するモジュラー形式全体の作るベクトル空間を表わします．(モジュラー形式の定義などについては文献 [17], [13], [4] 等を参照して下さい.) この時，

$$\dim \mathfrak{M}_k(\Gamma) < \infty, \quad \forall k,$$

$$\dim \mathfrak{M}_k(\Gamma) = 0, \quad \text{if } k < 0$$

であることは良く知られています．

$$\mathfrak{M}(\Gamma) = \oplus_{k=0}^{\infty}\mathfrak{M}_k(\Gamma)$$

で Γ に関するモジュラー形式全体の作る環（$\mathbb{C}$ 上の algebra）を表わします．この時

$$\mathfrak{M}(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[E_4,\ E_6]$$

(ただし E_4, E_6 はウェイト 4, 6 の Eisenstein series であり，代数的に独立，したがって $\mathbb{C}[E_4,\ E_6]$ は多項式環と同型）であることは良く知られています．従って

$$\Phi(\Gamma) := \sum_{k=0}^{\infty}(\dim \mathfrak{M}_k(\Gamma))\cdot t^k$$

とおくと,

$$\Phi(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) = \frac{1}{(1-t^4)(1-t^6)}$$

となります.

先ず, 次の問題を考えます.

問題: SL(2, $\mathbb{Z}$) 指数有限な部分群 Γ に対して $\mathfrak{M}(\Gamma)$ が多項式環と同型になるものを完全に分類せよ. (この時, この多項式環は 2 変数の多項式環でなければならないことは直ちに解ります.)

この問題に対する答えは次の様になります.

定理 1. $\mathfrak{M}(\Gamma) = \mathbb{C}[f_1, f_2]$ となるのは次のいずれかである. ただし f_1, f_2 は代数的に独立で $\mathbb{C}[f_1, f_2]$ は多項式環と同型. ここで weight $f_1 \leq$ weight f_2 とする. また以下の表に現われる Γ はいずれもこの条件を満たしている.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
weight of f_1	4	2	2	1	1	1
weight of f_2	6	4	2	3	2	1
$\lvert\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}):\Gamma\rvert$	1	3	6	8	12	24
the number of such Γ up to conj. in SL(2, $\mathbb{Z}$)	1	1	2	1	6	6
Γ		$\Gamma_0(2)$	$\Gamma(2)$, $\Gamma_0(4)$	$\Gamma_1(3)$	完全に記述できる	完全に記述できる (後述)

定理 1 の証明の概略

$\Gamma \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ に対して $\overline{\Gamma} = \Gamma \cdot \{\pm 1\}/\{\pm 1\} \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ と置く. この時, 次のパラメター達を考える.

$$\begin{cases} \mu = |\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}):\overline{\Gamma}|. \quad \left(\text{したがって} \quad |\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}):\Gamma| = \begin{cases} \mu & \text{if } -1 \in \Gamma \\ 2\mu & \text{if } -1 \notin \Gamma \end{cases} \right) \\ \nu_2 = \text{ the number of inequivalent elliptic points of order 2} \\ \nu_3 = \text{ the number of inequivalent elliptic points of order 3} \\ t = \nu_\infty = \text{ the number of inequivalent cusps} \\ g = \text{ genus of } \Gamma \ (= \text{genus of } \mathbb{H}^*/\Gamma) \end{cases}$$

この時,

$$g = 1 + \frac{\mu}{12} - \frac{\nu_2}{4} - \frac{\nu_3}{3} - \frac{t}{2}$$

が成り立つ.

今，$-1 \notin \Gamma$ の時，Γ の cusp $x \in \mathbb{H}$ に対して regular, irregular の概念を考える（例えば [17]，[13] 参照）．すなわち $\sigma(x) = \infty$，$\sigma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ とする時

$$\sigma \Gamma_x \sigma^{-1} = \left\{ \pm \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^m \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$$

とできるが $-1 \notin \Gamma$ であることから右辺は$\begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ または $-\begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ のいずれか一方しか含まない．前者の時 cusp x は regular 後者の時 irregular と呼ばれる．ここで

$$\begin{aligned} u =& \text{ the number of inequivalent regular cusps} \\ v =& \text{ the number of inequivalent irregular cusps} \end{aligned}$$

とおく．この時もちろん $t = u + v$ が成り立つ．

ここで重要なことは，$\dim \mathfrak{M}_k(\Gamma)$ $(k \geq 2)$ は上のパラメター達のみを用いて計算できると言うことである．詳しくは Shimura [17, pp. 46–47] または Miyake [13, pp. 60–61] を参照．すなわち，

$$\begin{aligned} k = 2 &\implies \begin{cases} g + t - 1 & \text{if } t > 0 \\ g & \text{if } t = 0 \end{cases} \\ k = \text{ even} \geq 4 &\implies (k-1)(g-1) + \nu_2[\tfrac{k}{4}] + \nu_3[\tfrac{k}{3}] + \tfrac{k}{2}\, t \\ k = \text{ odd} \geq 3 &\implies (k-1)(g-1) + \nu_2[\tfrac{k}{4}] + \nu_3[\tfrac{k}{3}] + \tfrac{k}{2}\, u + \tfrac{k-1}{2} v \end{aligned}$$

が成り立つ．($\mathfrak{M}_1(\Gamma)$ は一般に計算法は知られていない様である．) Φ が 2 変数多項式環と同型であれば，

$$\Phi(\Gamma) = \frac{1}{(1-t^a)(1-t^b)}$$

とおけ，$ab \mid 24$ でなければいけないことが直ちに解る．$\Phi(t)$ の t^2，t^3，t^4，… などの係数を上に述べた $\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ の次元公式と比べることにより，$(a,\ b)$ の可能性が定理 1 で述べた (a) ∼ (f) のいずれかに限られる事が比較的容易に示される．(a)∼(f) のそれぞれについて Γ を決めていくわけであるが，ここでは一番難しい (f) の場合（$(a,\ b) = (1,\ 1)$ の時）についてのみ述べる．他の場合も同様に，より簡単に証明できる．

今，

$$\Phi(\Gamma) = \frac{1}{(1-t)(1-t)} = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 + 5t^4 + \cdots$$

と仮定すると，t^2，t^3，t^4,… などの係数を上に述べた $\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ の次元公式と比べることにより次の結果を得る．

$$(\#) \qquad \begin{cases} 1) & -1 \notin \Gamma \\ 2) & \mu = 12, \quad \text{従って } |\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) : \Gamma| = 24 \\ 3) & g = 0 \\ 4) & \nu_2 = \nu_3 = 0 \\ 5) & t = 4 \\ 6) & u = 4\ (v = 0) \end{cases}$$

この条件 (#) を満たす $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ を $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の中の共役を除いて分類することが次の目標である．この際に大事なことは次の事である．

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})/\overline{\Gamma} = \overline{X}, \quad |\overline{X}| = 12\ (=\mu),$$

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\Gamma = X, \quad |X| = 24\ (=2\mu)$$

が成り立つことに注意する．この時，

$$X = \{1,\ 2,\ \ldots,\ 12\} \cup \{1',\ 2',\ \ldots,\ 12'\}$$

であり $-1 \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の X 上の作用は

$$-1 = (1,1')(2,2')\cdots(12,12')$$

と仮定して良い．また，

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = <\phi,\ \lambda \mid \phi^3 = \lambda^4 = 1, \quad [\lambda^2,\psi] = 1\ > \quad (\text{ただし } \lambda^2 = -1)$$

であり，さらに

ϕ は $\nu_2(=0)$ 個の $\overline{X}$ の点を固定し，
λ は $\nu_3(=0)$ 個の $\overline{X}$ の点を固定し，
$\psi\lambda$ は $\overline{X}$ 上の作用の cycle 分解が $(n_1)(n_2)\cdots(n_t)$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = \mu$

である事が良く知られている（[12] 参照）．この時，Γ の全ての cusp x が regular であるための必要十分条件は $\phi\lambda$ の X 上の作用の cycle 分解が

$$(n_1)(n_2)\cdots(n_t)(n_1)(n_2)\cdots(n_t)$$

となることが示される．(この部分は重要でありそれ自身興味深いが，ここでは詳しくは述べない．) そして，この時，$\Gamma \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ で上の条件 (#) を満たすものを $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ の共役を除いて考えたものは 2μ 次の対称群 $S_{2\mu}$,（X 上の置換群と見る）の部分群 G で次の条件 (i), (ii), (iii) および (iv) を満たすものを $S_{2\mu}$ の中の共役を除いて考えたものと完全に一対一に対応することが示される．

(i) $G = \langle\overline{\phi},\overline{\lambda}\rangle \subset C_{S_{2\mu}}((1,1')(2,2')\ldots(12,12'))$
(ii) $\overline{\phi}^2 = 1$, $\overline{\phi}$ は $\overline{X}$ 上に作用する時固定点を持たない．
(iii) $\overline{\lambda}^3 = 1$, $\overline{\lambda}$ は $\overline{X}$ 上に作用する時固定点を持たない．
(iv) $\overline{\phi}\,\overline{\lambda}$ は $\overline{X}$ 上に作用する時に 4 つの軌道を持ち，X 上に作用する時には 8 つの軌道を持つ．

さて，S_{24} の中のこの様な部分群 G は S_{24} の中での共役を除いて次の表にある 6 つのものに限られることが示される（コンピューターを用いる）．下記の表では G に対応する Γ を G の位数 $|G|$ ごとにまとめてある．(この場合，G はその位数 $|G|$ により一意的に定まっている．)

$\lvert G\rvert$	24	48	120	144	192	648
Γ	$\Gamma(3)$	$\Gamma(4)$ を index 2 で含む群	$\Gamma_1(5)$	$\Gamma_1(6)$	$\Gamma_0(8)$ の index 2 の部分群	$\Gamma_0(9)$ の index 2 の部分群

注意： ここで,

$$\Gamma_0(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\;\middle|\; c\equiv 0 \bmod N\right\},$$

$$\Gamma_1(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\;\middle|\; \begin{array}{c} c\equiv 0 \pmod N \\ a\equiv d\equiv 1 \pmod N \end{array}\right\},$$

そして $|G|=48$ の時の Γ は

$$\Gamma=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\;\middle|\; \begin{array}{c} c\equiv 0 \pmod 4 \\ a\equiv d\equiv 1 \pmod 4 \\ b\equiv 0 \pmod 2 \end{array}\right\}$$

である.

なお，上の 6 つのいずれの $\Gamma\subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ に対しても，2 つの代数的に独立な weight 1 のモジュラー形式 ϕ_1,ϕ_2 を持ち,

$$\mathfrak{M}(\Gamma)=\mathbb{C}[\phi_1,\phi_2]$$

であることが，ϕ_1,ϕ_2 を具体的に構成することにより示される．Hecke の全集 [5] の論文 No. 24 によるアイデアを用いる（小池）.（この部分は重要でありそれ自身興味深いが，ここでは詳しくは述べない.）なお、$\Gamma(3)$ と$\Gamma_0(9)$ の index 2 の部分群は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の中で共役，$|G|=48$ の Γ と $|G|=648$ の $\Gamma_0(8)$ の index 2 の部分群は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の中で共役である．従って ϕ_1, ϕ_2 の具体的な構成は $|G|$ が 192 および 648 の場合，$|G|$ が 24 および 48 の場合に帰着されることに注意しよう．なお，$|G|=24$ の場合の $\Gamma=\Gamma(3)$ に対しては,

$$\begin{cases} \phi_1=\displaystyle\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2} q^{x^2-xy+y^2}=1+6(q+q^3+q^4+2\,q^7+q^9+q^{12}+2\,q^{13}+\cdots), \\ \phi_2=q^{\frac{1}{3}}\displaystyle\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2} q^{x^2-xy+y^2+x-y}=3\,q^{\frac{1}{3}}(1+q+2\,q^2+2\,q^4+\cdots), \end{cases}$$

ただし $q=e^{2\pi i\tau}$, $\tau\in\mathbb{H}$ であり，これらは ternary self-dual codes の weight enumerators と関係している（Ebeling [4] 参照)．すなわち,

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\Gamma(3)\cong \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})=\langle\frac{1}{i\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix}\rangle\subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$$

であり,

$$\mathbb{C}[x,y]^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})}=\mathbb{C}[f,\ g],\quad f(x,y)=x^4+8\,xy^3,\ g(x,y)=x^6-20\,x^3y^3-8\,y^6$$

であり，さらに上の ϕ_1, ϕ_2 を f および g の x, y に代入するとそれぞれ E_4 と E_6 になると言う事実がある．ここで，$SL(2,\mathbb{Z})$ は ϕ_1, ϕ_2 で張られる 2 次元ベクトル空間の上に (automorphic factor を除いて) $SL(2,\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ として働く．この群は位数 24 の複素鏡映群 (Shephard-Todd [16] の分類表の No. 4）と一致する．

§2. 半整数ウエイトのモジュラー形式

Γ を $SL(2,\mathbb{Z})$ の指数有限の部分群，k を半整数（$k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$）とする．半整数ウエイトのモジュラー形式に関しては [18] などが良く知られた文献と思われる．ここでは詳しくは述べないが，正確に言うと半整数ウエイトのモジュラー形式はある固定した multiplier system に対して定義される．他の分数ウエイトのモジュラー形式についても同様である（詳しくは [15] 参照）．

$\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ で（ある固定した multiplier system に対する）Γ に関するウエイト k ($k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$) のモジュラー形式全体の作るベクトル空間を表わす．

$$\mathfrak{M}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \bigoplus_{k\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} \mathfrak{M}_k(\Gamma)$$

で Γ に関する半整数ウエイトのモジュラー形式全体の作る環を表わす．

「$\mathfrak{M}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ が多項式環と同型になるのはいつか?」

と言う問題を次に考察する．

条件から，$\mathfrak{M}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \mathbb{C}[\phi_1, \phi_2]$，$\phi_1$, ϕ_2 は代数的に独立，とし，特に ϕ_1 と ϕ_2 のウエイトが $\frac{1}{2}$ の場合を考える．この時次の (1)~(6) が成り立つ．

$$(\#\#) \qquad \begin{cases} 1) & -1 \notin \Gamma \\ 2) & \mu = 24, \quad \text{従って } |SL(2,\mathbb{Z}) : \Gamma| = 48 \\ 3) & g = 0 \\ 4) & \nu_2 = \nu_3 = 0 \\ 5) & t = 6 \\ 6) & u = 6 \ (v = 0) \end{cases}$$

これは

$$\Phi(\Gamma) = \sum_{k\in\frac{1}{2}\mathbb{Z},\ k\geq 0} (\dim \mathfrak{M}_k(\Gamma))\, t^k = \frac{1}{(1-t^{\frac{1}{2}})^2}$$

のいくつかの t の整数巾の項の係数を次元公式と比較することのみにより得られる．

さて，上の 1)~6) を満たす Γ を（$SL(2,\mathbb{Z})$ の中の共役を除いて）求める事は，§1 で述べたことと同様には出来ない．しかし $PSL(2,\mathbb{Z}) = \langle \phi,\ \lambda \mid \phi^3 = \lambda^2 = 1 \rangle$ の指数 24 の部分群に 4) の条件を加味して全てコンピューターで分類することにより，Γ は $SL(2,\mathbb{Z})$ の中の共役を除いて丁度 191 個あることが得られる（宗政）．この時，$|G|$ は一番小さい時が 48，一番大きい時が $2^{23}|A_{24}|$ であり，いろいろの値をとる．位数が同じで，共役でない G がいくつも現われる時もある．また，Γ の生成元なども具体的に記述される．$|G| = 48$

の場合 $\Gamma = \Gamma(4)$ となる．なお，ここに出てくる 191 の Γ のなかには多くの非合同部分群も現れる．

注意．$\Gamma = \Gamma(4)$ の時，

$$\mathfrak{M}^{\frac{1}{2}}(\Gamma(4)) = \mathbb{C}[\theta_3(2\tau), \theta_2(2\tau)]$$

がなりたつ．(正確には，自然な multiplier system に対して考えている．) ここで，$\theta_3(2\tau)$, $\theta_2(2\tau)$ は Jacobi の theta 関数であり，1 次元の格子 $\sqrt{2}\mathbb{Z}$ およびそれを平行移動した $\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ のテーター級数である．(更に，$\theta_3(2\tau), \theta_2(2\tau)$ は代数的に独立であり，いずれも $\Gamma(4)$ のウエイト $\frac{1}{2}$ のモジュラー形式である．これらのことは，良く知られている．(Ebeling [4] 参照)．もう少し詳しく言うと，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ は$\theta_3(2\tau), \theta_2(2\tau)$ で張られる 2 次元のベクトル空間の上に（automorphic factor を除いて）次の位数 96 の複素鏡映群（Shephard-Todd [16] の分類表の No.8）H として作用する．ここで，H は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\Gamma(4)$ の 2 重被覆群である．

$$H = \langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \rangle \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$$

であり，

$$\mathbb{C}[x,y]^H = \mathbb{C}[f,\ g], \quad f(x,y) = x^8 + 14x^4y^4 + y^8,\ g(x,y) = x^{12} - 33x^8y^4 - 33x^4y^8 + y^{12}$$

であり，さらに上の $\theta_3(2\tau)$, $\theta_2(2\tau)$ を f および g の x, y に代入するとそれぞれ E_4 と E_6 になると言う事実がある．

上で求めた他のΓ に対して，特にΓ が非合同部分群の場合に，いつ $\mathfrak{M}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ がウエイト $\frac{1}{2}$ の 2 つのモジュラー形式で生成される多項式環になるかは一般には知られておらず，また難しい問題であるが，多くの場合，望むらくは全ての場合，そうなっているのではないだろうかと期待している．このことが示されれば非常に面白いであろう．

§3. $\frac{1}{l}\mathbb{Z}$ ウエイトのモジュラー形式

§2. で半整数ウエイトのモジュラー形式を考えたが，2 以上の自然数 l に対しても．素人の強みで，形式的に，ウエイト $\frac{1}{l}\mathbb{Z}$ のモジュラー形式を考えてみよう．これらも正確には，ある固定した multiplier system に対してのモジュラー形式である．(詳しくは [15] 参照)．この時，半整数の場合と同様に，

「$\mathfrak{M}^{\frac{1}{l}}(\Gamma)$ が多項式環と同型になるのはいつか?」

と言う問題を考えよう．

条件から，$\mathfrak{M}^{\frac{1}{l}}(\Gamma) = \mathbb{C}[\phi_1,\ \phi_2]$，$\phi_1$，$\phi_2$ は代数的に独立，とし，特に ϕ_1 とϕ_2 のウエイトが $\frac{1}{l}$ の場合を考える．この時次の (1)〜(6) が成り立つ．

$$
(\#\#\#) \quad \begin{cases} 1) & -1 \notin \Gamma \\ 2) & \mu = 12\,l, \quad \text{従って } |\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\ :\ \Gamma| = 24\,l \\ 3) & g = 0 \\ 4) & \nu_2 = \nu_3 = 0 \\ 5) & t = 2\,l + 2 \\ 6) & u = 2\,l + 2\ (v = 0) \end{cases}
$$

§1, 2 の議論と同様に，Γ の分類は対称群 S_{24l} のある条件を満たす部分群 G の分類に帰着される．そのような G を完全に分類することは，$l=1$, 2 の場合と異なり，$l \geq 3$ の場合はコンピューターをもちいても複雑すぎて難しいと思われる．従って，完全な分類はあきらめて，面白い例の考察に集中してみようと思う．まず，これらのΓ 達は全て genus 0 であることに注意しよう．一方，genus 0 で $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ の正規部分群になるのは，次の場合しか起こらないことが，Mason [11] により証明されている．すなわち，$\overline{\Gamma}(1)$, $\overline{\Gamma}(1)^2$, $\overline{\Gamma}(1)^3$, $\overline{\Gamma}(2)$, $\overline{\Gamma}(3)$, $\overline{\Gamma}(4)$, $\overline{\Gamma}(5)$ に限る．(詳細，記号は [11] などを参照.) ここで，$l=1$, 2 の場合に，$\Gamma(3)$, $\Gamma(4)$ が表われたことに注意しよう．さて，$\Gamma(5)$ を $l=5$ の場合に考えると，これは上に述べた (# # #) を満たすことがしめされる．一方，良く知られているように，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ を $\Gamma(3)$, $\Gamma(4)$, $\Gamma(5)$ で割ったものは，それぞれ Klein の意味での 3 つの正多面体群になり，良く調べられている．これら 3 つだけがいろいろの意味で特別であることは自然である．従って，$\Gamma(3)$, $\Gamma(4)$ に起こったことが $\Gamma(5)$ に起こることを期待することは自然であろう．このことに勇気付けられて，次の予想に到達した。(1998 年 11 月頃であった.)

予想 (いずれもあとで述べるように証明も完成している.)

(1) ある multiplier system に対して，

$$
\mathfrak{M}^{\frac{1}{5}}(\Gamma(5)) = \mathbb{C}[\phi_1, \phi_2]
$$

が成り立つ．ここで，ϕ_1, ϕ_2 は (ある multiplier system に対する) weight $\frac{1}{5}$ の $\Gamma(5)$ に関するモジュラー形式であり，代数的に独立．従って，$\mathbb{C}[\phi_1,\ \phi_2]$ は多項式環と同形である。

(2) 上の ϕ_1, ϕ_2 で張られる 2 次元の ($\mathbb{C}$ 上の) ベクトル空間の 上に，$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ が (automorphic factor を除くと) 位数 600 の複素 鏡映群 (Shephard-Todd の分類表の No. 16) G_{600}として働く．(ここで，G_{600} は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\Gamma(5)$ の 5 重被覆群である．)

(3) (2) で述べた位数 600 の複素鏡映群 G_{600} が 2 変数多項式環 $\mathbb{C}[x,y]$ に働いたときの不変式環 $\mathbb{C}[x,y]^{G_{600}}$ は次の次数 20 と 30 の斉次多 項式で生成される多項式環と同形である．(これらの多項式は Klein [7], Shephard-Todd [16] に述べられている.)

$$
f(x,y) = x^{20} + y^{20} - 228(x^{15}y^5 - x^5y^{15}) + 494x^{10}y^{10},
$$
$$
g(x,y) = x^{30} + y^{30} + 522(x^{25}y^5 - x^5y^{25}) - 10005(x^{20}y^{10} + x^{10}y^{20}).
$$

このとき，(1) でϕ_1, ϕ_2 を次の条件を満たすようにとれる．

$$
f(\phi_1, \phi_2) = E_4,
$$

$$g(\phi_1, \phi_2) = E_6.$$

(ここで E_4, E_6 は Eisenstein series.)

さて，問題は先ず，式 (# #) を満たすような ϕ_1, ϕ_2 を具体的に決定する ことである．それを関口，小池などに質問したところ，Klein の本 [7] の日本語版 146 ページにある式から出発して，次の非常にきれいな形で結着を見ました．（小池，関口をもまきこんでの共同研究が始まりました.）

すなわち，

$$\phi_1 = q_0^{-\frac{3}{5}} q^{\frac{2}{5}} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (-1)^k q^{5k^2-3k},$$

$$\phi_2 = q_0^{-\frac{3}{5}} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (-1)^k q^{5k^2-k}$$

とおくと，式 (# #) が成り立つことがわかります.（さらに，式 (# #) を満たす ϕ_1，ϕ_2 の組みも完全に決定されています．ϕ_1，ϕ_2 は良い無限積表示を持ちます．

後で分かったことですが，上の ϕ_1，ϕ_2 と関連した関数はは色々なところに現われます．例えば，Yang-Baxter の解に（[14] 参照），Rogers-Ramanujan に（ Andrews [1] 参照）．関口 [19] では微分方程式との関係も考察されています．

以上が 12 月の研究集会での講演時に解っていたことです．その時点では予想は非常に確からしいが，証明は完全には出来ていませんでした．(2) に関しては，その後すぐに関口により，$\phi_i(-\frac{1}{\tau})$，$\phi_i(\tau+1)$，$i=1$，2，などが計算できて，ほぼ成り立つことはわかりましたが，(1) の ϕ_1，ϕ_2 が $\Gamma(5)$ に関する weight $\frac{1}{5}$ のモジュラー形式になるという部分の証明にはかなりてこずりました，というか，weight $\frac{1}{5}$ のモジュラー形式とは何を 意味するか，multiplier system とは何か，を理解するのに時間がかかったと言えます．4 名による共同研究が着実に進展し最終的には，1999 年 3 月の時点で，ある multiplier system が存在してその multiplier system に対してそのことが成り立つという形で，完成しました．ただし，これを書いている現在（1999 年 4 月）でも，この multiplier system の具体的な記述には成功していないといえます．久保田 [9] で述べられているように，半整数の ウエイトのモジュラー形式を定義する multiplier system を記述することは，平方剰余の相互法則と密接に関係しています．ここにあらわれる我々の weight $\frac{1}{5}$ のモジュラー形式の multiplier system は 5 乗剰余の相互法則 と関係しているように思われます.（無責任な予想かもしれませんが.）

従って，12 月の講演で述べた上の予想は，(1)，(2)，(3) の全部が 解決された訳です．いずれにせよ，ウエイトが分数（$\frac{1}{l}\mathbb{Z}$）であるモジュラー形式はまだいろいろの方向から研究の余地があり，非常に面白いのでは ないかと思います．

最後にいくつか補足を述べて終わります．

(a) モジュラー形式全体の作る空間が多項式環と同形になる $SL(2,\mathbb{Z})$ の部分群Γ の決定は有限複素鏡映群の分類の類似と見ることもできると 思います．正確に言うと，ここで与えた分類は 2 次元の有限複素鏡映群の分類に対応 します。一般の次元での有限複素鏡映群の分類に対応するのは，Siegel modular 群 $Sp(2g,\mathbb{Z})$ の部分群 Γでそれにかんする

Siegel モジュラー形式全体の作る空間が多項式環と同形になるものの分類が対応すると 思われます.

(b) なぜモジュラー形式全体の作る空間が多項式環と同形になる場合に興味を持ったかの理由ですが, (a) で述べたこともひとつですが, その他にも次の理由があります. もし, $\mathfrak{M}(\Gamma) = \mathbb{C}[\phi_1, \phi_2]$ であれば, Γ を 含む任意の群 $\tilde{\Gamma}$ に対して, $\mathfrak{M}(\tilde{\Gamma})$ の元達は全て ϕ_1, ϕ_2 の多項式であらわされ, $\mathfrak{M}(\tilde{\Gamma})$ が比較的簡単に求められることが期待出来ることにあります。小池 [8] による ある種の三角群の作るモジュラー形式全体の作る空間の決定を良く理解しようという のも, このことと関係していて, 私にとって, この種のことに興味を持った理由でした.

(c) さて, ここで述べたことのいろいろな拡張も可能と思います。例えば, $\Gamma(7)$ の $\frac{1}{7}\cdot$整数のモジュラー形式を (形式的に) 考え, 整数ウエイトのところでの次元公式を用いると,

$$\Phi(\mathfrak{M}^{\frac{1}{7}}(\Gamma(7))\ (= \sum_{k\in\frac{1}{7}\cdot\mathbb{Z}, k\geq 0} (\dim\mathfrak{M}_k(\Gamma)t^k)$$

$$= \frac{1+t^{\frac{4}{7}}}{(1-t^{\frac{1}{7}})^2}$$

と期待できると思われます. 従って,

$$\mathfrak{M}^{\frac{1}{7}}(\Gamma(7)) \cong \mathbb{C}[\phi_1, \phi_2] \oplus \mathbb{C}[\phi_1, \phi_2]\eta$$

となる weight ϕ_1 = weight $\phi_2 = \frac{1}{7}$ (ϕ_1, ϕ_2 は 代数的独立), weight $\eta = \frac{4}{7}$ となる $\Gamma(7)$ のモジュラー形式は存在するのではと期待できます. (無責任な予想かもしれませんが.) 他のいろいろな Γ にたいしても、その weight $\frac{1}{l}\cdot$整数のモジュラー形式, および $\mathfrak{M}^{\frac{1}{l}}(\Gamma)$ を考えることは, 非常に興味あるのではないかと考えます.

References

[1] G. Andrews, The Theory of Partitions, Addison-Wesley, 1976.

[2] A. O. L. Atkin and H. P. F. Swinnerton-Dyer, Modular forms of noncongruence subgroups, Proc. in Pure Math. AMS 19(1971) 1-25.

[3] M. Broué and M. Enguehard, Polynomes des poids de certains codes et fonctions theta de certains reseaux, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 5(1972) 157-181.

[4] W. Ebeling, Lattices and Codes, Vieweg, 1994.

[5] E. Hecke, Mathematische Werke, Vandenhoeck and Ruprecht, Gottingen, 1970.

[6] 平松豊一, 数論を学ぶ人のための相互法則入門, 牧野書店 1998.

[7] F. Klein, 正２０面体と５次方程式. シュプリンガー・フェアラク東京.

[8] M. Koike, Binary, ternary, quaternary codes and modular forms with respect to nin-compact triangle arithmethic, 第１５回代数的組合せ論報告集 (1998) 62-85.

[9] 久保田富雄, 整数論の一側面　一つの新観点からみた平方剰余　, 科学 38(1964) 551-555.

[10] D. P. Maher, Modular forms from codes, Can. J. Math. 32(1980) 40-57.

[11] A. W. Mason, Lattice subgroups of normal subgroups of genus 0 of the modular group, Proc. London Math. Soc. (3)24(1972) 449-469.

[12] M. H. Millington, Subgroups of the classical modular group, J. London Math. Soc. (2)1(1969) 351-357.

[13] T. Miyake, Modular Forms, Springer-Verlag, 1989.

[14] 尾角正人, 神保道夫, 三輪哲二, 2次元の可解な格子模型とモジュラー函数, 数学 40(1988) 1-18

[15] R. A. Rankin, Modular Forms and Functions, Cambridge University Press, 1977.

[16] G. C. Shephard and J. A. Todd, Finite unitary reflection groups, Canad. J. Math. 6(1954) 274-304.

[17] G. Shimura Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions, Iwanami Shoten and Princeton University Press, 1971

[18] G. Shimura On Modular forms of half-integral weight, Ann. of Math. (2) 97(1973) 440-481.

[19] 関口次郎, Icosahedral Equation and Differential Equation of Halphen Type 研究集会「超幾何系ワークショップ in 神戸 '98」予稿集, 報告集 (?).